



TITLE:

# 保型 $SL_2$ -関数の族のuniversality theorem (解析数論の展望と諸問題)

AUTHOR(S):

名越, 弘文

---

CITATION:

名越, 弘文. 保型 $SL_2$ -関数の族のuniversality theorem (解析数論の展望と諸問題). 数理解析研究所講究録 2001, 1219: 195-205

ISSUE DATE:

2001-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/41271>

RIGHT:

# 保型 $L$ -関数の族の universality theorem

慶応大理工 名越弘文 (Hirofumi Nagoshi)

Department of Mathematics, Keio University

## 1. 序論

1975 年に、Voronin [Vo] が、リーマン・ゼータ関数  $\zeta(s)$  ( $s = \sigma + it$ ) に対して、Universality Theorem と呼ばれる結果を発表した。その後、様々な研究者によって、この結果の拡張や別証がなされたが、今では、リーマン・ゼータ関数の Universality Theorem とは、例えば、次のように述べる事が出来る。

**Theorem 1.1.** 任意に、帯領域  $D = \{s \mid \frac{1}{2} < \operatorname{Re}(s) < 1\}$  内の単連結なコンパクト集合  $K$  と、 $K$  の内部で正則かつ  $K$  上零点を持たないような  $K$  上連続関数  $h(s)$  と、正数  $\varepsilon > 0$  を与える。そのとき、

$$\max_{s \in K} |\zeta(s + it) - h(s)| < \varepsilon$$

となる  $t$  が存在する。より詳しくは、

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} m\{t \in [0, T] \mid \max_{s \in K} |\zeta(s + it) - h(s)| < \varepsilon\} > 0$$

が成り立つ。ここで、 $m$  は、 $\mathbb{R}$  上の普通のルベーグ測度である。

この定理は、 $\zeta(s)$  を  $D$  上で虚軸方向に平行移動させることによって、比較的弱い条件の勝手な関数を  $K$  上で一様に  $\varepsilon$ -近似させることができるというもので、 $K$  上の関数集合における  $\{\zeta(s + it) \mid t \in \mathbb{R}\}$ ,  $s \in K$  のエルゴード的な性質を意味する。実際、定理の証明においては、素数に渡る無限次元トーラス  $\prod_p S^1$  において、各成分で  $\log p$  だけ回転させることが、エルゴード的になることが、一つのキーになっていて、オイラー積表示  $\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$ ,  $\operatorname{Re}(s) > 1$  が重要な役割を果たす。証明の参考文献としては、[KV] や [La]。

この種の結果が、他の関数に対しても成立するかは興味の対象であるが、“具体的 (形式的でない)” な関数としては、今までのところ、Dirichlet の  $L$ -関数 ([Ba] [Go] 等) Dedekind ゼータ関数 ([Re])、Hecke 指標に対する  $L$ -関数 ([Mi1] [Mi2])、ある種の Lerch ゼータ関数 ([LM2] 等)、 $SL(2, \mathbb{Z})$  の正則 Hecke eigen cusp form に付随する  $L$  関数 ([LM1]) などのゼータ関数や  $L$ -関数と呼ばれる数論的関数に関して成立が知られているが (その他、[La] や [KV] にある文献を参照して下さい)、それらの証明においては、各々、何らかの数論的事実を使っている。

さて、以上の結果はすべて、パラメータ  $t$  を動かしたときの様子であり、いわゆる  $t$ -aspect と呼ばれる観点である。今まで、Universality Theorem の研究では  $t$ -aspect

に関する研究が主に行なわれており、それ以外の aspect に関しては、[Em] と [Go] において、 $\text{mod } q$  の Dirichlet 指標  $\chi$  に関する  $q$ -aspect に関して研究されたものしか知られていなかった。今回、 $t$ -aspect 以外の aspect の例として、 $\text{GL}(2)$  の保型  $L$  関数について、重み  $k$ , レベル  $N$ , ラブラシアン固有値  $\lambda$  の 3 つの aspect について、Universality Theorem を得たので、それを紹介する。

Section 2 において、今回の主結果を述べ、Section 3 以降において、証明の概略を述べていくことにする。

## 2. 設定と主結果

まずはじめに、正則 Hecke eigen cusp forms に付随する  $L$  関数の族における、2 つの aspect についての結果を述べる。

以下、 $k$  は偶数、 $N$  は素数を表すことにする。今、 $\Gamma_0(N)$  に関する重さ  $k$  の正規化された正則 newform  $f$  を取ってくる ([AL])。ここで、cusp form  $f$  の無限遠点でのフーリエ展開を  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n) e^{2\pi i n z}$  としたとき ( $f$  が newform なら  $a_f(1) \neq 0$  である)、正規化された  $f$  とは、 $a_f(1) = 1$  なるものを表す。Hecke 作用素  $T_n$  に対して、 $T_n f = \widehat{\lambda}_f(n) f$  のとき、 $\lambda_f(n) := \widehat{\lambda}_f(n) / n^{\frac{k-1}{2}}$  と置くと、Ramanujan 予想の成立により、 $\lambda_f(p) \in \Omega = [-2, 2]$  ( $p$  は素数) である。このとき、 $f$  に付随する  $L$  関数は、

$$L(s, f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_f(n)}{n^s} = \prod_p \left( 1 - \frac{\lambda_f(p)}{p^s} + \frac{\chi_0(p)}{p^{2s}} \right)^{-1}, \quad \text{Re}(s) > 1$$

と定義されるのであった。ここで、 $\chi_0$  は、自明な Dirichlet 指標  $\text{mod } N$  である。よく知られているように、 $L(s, f)$  は、全平面に解析接続され、ある関数等式を持つ。

さて、次の 2 つの  $L$ -関数の族を考える。

(I)  $\mathcal{L}_k = \{L(s, f) \mid f \in \mathcal{F}_k\}$ , as  $k \rightarrow \infty$ 。ここで、 $\mathcal{F}_k$  は、 $\Gamma = \text{SL}(2, \mathbb{Z})$  に関する重さ  $k$  の正規化された正則 Hecke eigen cusp forms 全体を表す。

(II)  $\mathcal{L}_N = \{L(s, f) \mid f \in \mathcal{F}_N\}$ , as  $N \rightarrow \infty$ 。ここで、 $\mathcal{F}_N$  は、 $\Gamma = \Gamma_0(N)$  に関する重さ  $k$  (固定する) の正規化された正則 newform 全体を表す。

これら 2 つの aspect について、今回、次の結果を得た。

**Theorem 2.1.** 任意に、帯領域  $D = \{s \mid \frac{1}{2} < \text{Re}(s) < 1\}$  内の単連結なコンパクト集合  $K$  と、 $K$  の内部で正則かつ  $K$  上零点を持たないような  $K$  上連続関数  $h(s)$  と、正数  $\varepsilon > 0$  を与える。そのとき、

- (1) 
$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\#\mathcal{F}_k} \#\{f \in \mathcal{F}_k \mid \max_{s \in K} |L(s, f) - h(s)| < \varepsilon\} > 0,$$
- (2) 
$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\#\mathcal{F}_N} \#\{f \in \mathcal{F}_N \mid \max_{s \in K} |L(s, f) - h(s)| < \varepsilon\} > 0$$

が成立する。

この系として、次が直ちに成り立つ。

**Corollary 2.1.** (値分布)  $D$  内の点  $s_0$  を勝手に取ってくる。そのとき、 $L$ -関数達の  $s_0$  での値の集合  $\{L(s_0, f) \mid f \in \mathcal{F}_k\}, \{L(s_0, f) \mid f \in \mathcal{F}_N\} \subset \mathbb{C}$  は、それぞれ、 $k \rightarrow \infty, N \rightarrow \infty$  のとき、 $\mathbb{C}$  において稠密となる。

**Corollary 2.2.** (*Non-vanishing*)  $D$  内の任意の単連結コンパクト集合  $K$  を取ってくる。そのとき、 $K$  上で  $L(s, f) \neq 0$  となる  $f \in \mathcal{F}_k$  と  $f \in \mathcal{F}_N$  が、それぞれ、 $k$  と  $N$  が十分大きいならば存在し、また、それら全体は、 $k, N \rightarrow \infty$  で正の下極限密度を持つ。

次に、モジュラー面上の非正則 cusp forms に関して、ラプラシアン固有値  $\lambda_j (j = 1, 2, \dots)$  をパラメータと見たとき、付随する  $L$ -関数達の族についての Universality Theorem を述べる。

まず、設定であるが、 $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$  として、モジュラー面  $\Gamma \backslash \mathbb{H}^2$  上の  $L^2$ -空間において、ラプラシアン  $\Delta$  と Hecke 作用素  $T_n (n = 1, 2, \dots)$  が、

$$\begin{cases} \Delta \varphi(z) = -y^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi(z), \\ T_n \varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\substack{ad=n \\ b \bmod d}} \varphi\left(\frac{az+b}{d}\right) \end{cases}$$

と定義される。これらは互いに可換な自己共役作用素で、ゆえに、これらの  $L^2(\Gamma \backslash \mathbb{H}^2)$  上での同時固有関数の集合が存在するが、定数関数でなく、特に正規化したもの (フーリエ係数に関して) の全体を、 $\mathcal{C}_\Gamma = \{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$  と表すことにする (Maass-Hecke eigenforms) :

$$\begin{cases} \Delta \varphi_j(z) = \lambda_j \varphi_j(z), & \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \cdots, \\ T_n \varphi_j(z) = \lambda_j(n) \varphi_j(z). \end{cases}$$

また、これら正規化した固有関数  $\varphi_j(z)$  に対応する  $L$ -関数を、 $L(s, \varphi_j)$  と表すことにする :

$$L(s, \varphi_j) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_j(n) n^{-s} = \prod_p (1 - \lambda_j(p) p^{-s} + p^{-2s})^{-1}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1.$$

今回、考察する 3 つ目の  $L$ -関数の族は、

$$(III) \mathcal{L}_\lambda = \{L(s, \varphi_j) \mid \lambda_j \leq \lambda \text{ なる } \varphi_j(z) \in \mathcal{C}_\Gamma\}$$

であり、これに関して、次の結果を得た。量子カオス的な観点からしても興味深いと思われる。

**Theorem 2.2.** 任意に、 $D = \{s \in \mathbb{C} \mid \frac{1}{2} < \operatorname{Re}(s) < 1\}$  内の単連結なコンパクト集合  $K$  と、 $K$  の内部で正則かつ  $K$  上零点を持たないような  $K$  上連続関数  $h(s)$  と、正数  $\varepsilon > 0$  を取ってくる。そのとき、

$$\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\#\{\lambda_j \leq \lambda \mid \max_{s \in K} |L(s, \varphi_j) - h(s)| < \varepsilon\}}{\#\{\lambda_j \leq \lambda\}} > 0$$

**Corollary 2.3.** (値分布)  $D$  内の点  $s_0$  を勝手に取ってくる。そのとき、 $L$ -関数達の  $s_0$  での値の集合  $\{L(s_0, \varphi_j) \mid \varphi_j(z) \in \mathcal{C}_\Gamma\} \subset \mathbb{C}$  は、 $\mathbb{C}$  において稠密となる。

**Corollary 2.4.** (*Non-Vanishing*)  $D$  内の任意の単連結コンパクト集合  $K$  を取ってくる。そのとき、 $K$  上で  $L(s, \varphi_j) \neq 0$  となる  $\varphi_j(z) \in \mathcal{C}_\Gamma$  達は、 $\mathcal{C}_\Gamma$  において正の下極限密度を持つ。

### 3. HECKE 固有値の一様分布

この Section 以降に、Theorem 2.1 と Theorem 2.2 の証明の概略を述べていく。その証明においては、[Go] [La] [KV] 等を参考にしており、この先の文章でこれらの文献の内容と重複する部分もあるが、なるべく自己完結するように詳しく書くようにしていく。

はじめに、Hecke 固有値の一様分布性に関する結果を紹介する。まず、 $q > 1$  とし、 $n_q = q^{\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}} (> 2)$  と置き、 $\Omega = [-n_q, n_q]$  上の測度  $m_q$  を

$$dm_q(x) = \begin{cases} \frac{q+1}{n_q^2-x^2} \frac{1}{\pi} \sqrt{1-\frac{x^2}{4}} dx & \text{if } |x| < 2, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定義する。また、 $X_n(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$  を、第 2 種 Chebychev 多項式、すなわち、

$$X_n(x) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta} \quad \text{when } x = 2 \cos \theta (0 \leq \theta \leq \pi)$$

とし ( $X_0 = 1, X_1 = x, X_2 = x^2 - 1, X_3 = x^3 - 2x, \dots$ )、多項式  $X_{n,q}(x), n \in \mathbb{N}_0$  を

$$(3) \quad X_{n,q}(x) := X_n(x) - q^{-1} X_{n-2}(x)$$

(where we set  $X_n(x) := 0$  for  $n < 0$ ) で定義する。そのとき、

$$(4) \quad \int_{\Omega} X_{n,q}(x) dm_q(x) = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ 0 & (n>0) \end{cases}$$

( $\Omega := [-2, 2]$ ) が示せれ、 $\{X_n(x) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$  は、 $\Omega$  上で測度  $m_q$  に関する直交多項式系となっている。以上の設定のもとで、Hecke 固有値の一様分布に関して、次の定理が成り立つ。証明は、trace formula と  $\{T_p\}$  の乗法性を使う。[CDF] では  $k$ -aspect, [Se] では  $k, N$ -aspect、[Sa] では  $\lambda$ -aspect を扱っている。

**Theorem 3.1.** 今、 $\{p_1, p_2, \dots, p_\ell\}$  を相異なる  $\ell$  個の素数の集合として、 $X = \prod_{i=1}^{\ell} \Omega_{p_i}$  上の測度  $m$  を  $dm(\vec{x}) = \prod_{i=1}^{\ell} dm_{p_i}(x_i), \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_\ell) \in X$  で定める。そのと

き、 $X$  上の任意の連続関数  $g(\vec{x})$  に対して、次が成り立つ。

$$(5) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\#\mathcal{F}_k} \sum_{f \in \mathcal{F}_k} g(\vec{\lambda}_f) = \int_X g(\vec{x}) dm(\vec{x}),$$

ここで、 $\vec{\lambda}_f := (\lambda_f(p_1), \lambda_f(p_2), \dots, \lambda_f(p_\ell)), f \in \mathcal{F}_k$ ,

$$(6) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\#\mathcal{F}_N} \sum_{f \in \mathcal{F}_N} g(\vec{\lambda}_f) = \int_X g(\vec{x}) dm(\vec{x}),$$

ここで、 $\vec{\lambda}_f := (\lambda_f(p_1), \lambda_f(p_2), \dots, \lambda_f(p_\ell)), f \in \mathcal{F}_N$ ,

$$(7) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\#\{\lambda_j \leq \lambda\}} \sum_{\lambda_j \leq \lambda} g(\vec{\lambda}_j) = \int_X g(\vec{x}) dm(\vec{x}),$$

ここで、 $\vec{\lambda}_j := (\lambda_j(p_1), \lambda_j(p_2), \dots, \lambda_j(p_\ell)), j = 1, 2, \dots$

#### 4. DENSENESS LEMMA

以下の文章においては、Theorem 2.1 等の出てくる単連結コンパクト集合  $K$  を、頂点  $\sigma_1 \pm iA, \sigma_2 \pm iA$ ,  $(\frac{1}{2} < \sigma_1 < \sigma_2 < 1)$  の開長方形  $U$  に含ませておく。また、この先に出てくる文字  $c$  は、 $U$  または  $K$  で定まるある定数を表すとし（それらの  $c$  は、お互い、異なるかもしれない）、記号  $\ll$  の implied constant は、 $U$  または  $K$  のみに依存するか絶対定数である。

今、 $\pi(\rho)$  で  $\rho$  以下の素数の個数、 $p_i$  で  $i$  番目の素数を表すとする。また、 $\hat{\theta} = \hat{\theta}_\rho = (\theta(p_1), \theta(p_2), \dots, \theta(p_{\pi(\rho)}))$ ,  $\theta(p_i) \in \Omega$  に対して、

$$(8) \quad L_\rho(s, \hat{\theta}) = \prod_{p \leq \rho} \left( 1 - \frac{\theta(p)}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} \right)^{-1}$$

と置く。この Section では、次の Proposition を準備する。

**Proposition 4.1.**  $K$  を  $D$  内の単連結コンパクト集合、 $h(s)$  を  $K$  上で連続で  $K$  の内部で正則な関数とする。そのとき、任意の小さな  $\varepsilon > 0$  に対して、ある  $\rho_1$  があって、 $\rho \geq \rho_1$  ならば、

$$\max_{s \in K} |h(s) - L_\rho(s, \hat{\theta})| < \varepsilon$$

となる  $\hat{\theta}$  がある。

この証明には、まず、Riesz の表現定理と Separation Theorem (Hahn-Banach Theorem の 1 バージョン) から導かれる次の Lemma が基本である。

**Lemma 4.1.**  $\{x_m\}_{m=1}^\infty$  を実ヒルベルト空間  $H$  の点列で、次を満たすとする：

$$(9) \quad \sum_{m=1}^{\infty} |(x_m, x)| = \infty, \quad \text{for any } x (\neq 0) \in H$$

((, )) は、 $H$  における内積)。そのとき、各  $n$  に対して、

$$M_n = \left\{ \sum_{m=n}^{n'} a_m x_m \mid a_m \in [-1, 1], n' \geq n \right\}$$

は、 $H$  の中で稠密。

我々の設定では、 $H$  としては、空間  $L^2(U)$  の多項式で張られる部分空間の閉包  $P(U)$  を考える。ここで、内積は、

$$(g_1(s), g_2(s)) = \operatorname{Re} \int_U g_1(s) \overline{g_2(s)} d\sigma dt, \quad g_1, g_2 \in L^2(U)$$

である。Lemma 4.1 において、 $x_m$  として、

$$f_{p_m}(s) = \frac{1}{p_m^s}$$

を取り、Paley-Wiener の定理や [Lu, Theorem 6.4.14] (素数定理と Bernstein の定理による) を使うことにより、条件 (9) を満たすことを示すことが出来る。そのようにして、Lemma 4.1 により、多項式を  $f_{p_m}(s)$  を使って近似してやることができ、その上で、Mergelyan の定理 (Weierstrass の近似定理の複素関数版) や下の Lemma 4.2 等を用いて、Proposition 4.1 は証明される。

**Lemma 4.2.**  $K \subset \mathbb{C}$  を開長方形  $U$  のコンパクト部分集合とし、関数  $f(s)$  が、 $U$  上で正則であるとする。そのとき、

$$\begin{aligned} \int_U |f(s)| d\sigma dt \leq \varepsilon \text{ ならば、} \max_{s \in K} |f(s)| &\leq c\varepsilon. \\ \int_U |f(s)|^2 d\sigma dt \leq \varepsilon \text{ ならば、} \max_{s \in K} |f(s)| &\leq c\sqrt{\varepsilon}. \end{aligned}$$

## 5. $L$ 関数に関する命題

この Section では、主結果の証明に必要となる  $L$  関数に関するいくつかの事実を用意する。この講究録では、ページ数の関係上、特に  $k$ -aspect について、説明することにする。

**Proposition 5.1.**  $2 \leq \rho \leq \nu$  として、 $p \leq \rho$  なる素数  $p$  に対して、 $\theta_p \in (-2, 2)$  を固定する。小さな  $d = d(\rho)$  に対して、

$$(10) \quad |\lambda_f(p) - \theta_p| \leq d, \quad \text{for all } p \leq \rho$$

なる  $f \in \mathcal{F}_k$  全体を  $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\rho, d, k)$  で表し、 $B = \prod_{i=1}^{\pi(\rho)} [\theta_p - d, \theta_p + d] \subset \Omega^{\pi(\rho)}$  そのとき、

$$(11) \quad \sum_{f \in \mathcal{D}} \int_U |\log L_\rho(s, f) - \log L_\nu(s, f)| d\sigma dt \ll \mathcal{F}_k \cdot \int_B dm(\vec{x}) \cdot \rho^{\frac{1}{2} - \sigma_1}.$$

以下、Proposition 5.1 の証明の概略を述べていく。

$$(12) \quad \log L_\rho(s, f) - \log L_\nu(s, f) = \sum_{\rho < p \leq \nu} \frac{\lambda_f(p)}{p^s} + \sum_{\rho < p \leq \nu} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\alpha_f(p)^m + \overline{\alpha_f(p)}^m}{mp^{ms}}$$

( $\lambda_f(p) = \alpha_f(p) + \overline{\alpha_f(p)}$  とする)。この右辺の第一式を  $S_1(s, f)$ , 第二式を  $S_2(s, f)$  と置き、まず、 $\sum_{f \in \mathcal{D}} |S_1(s, f)|$  を評価していく。今、 $f \in \mathcal{F}_k$  に対して、 $\omega_f = 1 / \langle f, f \rangle$  (ここで、 $\langle, \rangle$  は、Petersson 内積) とすると、コーシーの不等式より、

$$(13) \quad \sum_{f \in \mathcal{D}} |S_1(s, f)| \leq \left( \sum_{f \in \mathcal{D}} \omega_f^{-1} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{f \in \mathcal{D}} \omega_f |S_1(s, f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

関数  $\xi_i(x_i)$ ,  $x_i \in \Omega$  を、 $x_i \in [\theta(p_i) - d, \theta(p_i) + d]$  なら  $\xi_i(x_i) = 1$ 、その外では、0 に急減少して、 $x_i \notin [\theta(p_i) - d - \varepsilon_1, \theta(p_i) + d + \varepsilon_1]$  ( $\varepsilon_1$  は固定された小さな正数) なら  $\xi_i(x_i) = 0$  なる滑らかな関数と定義し、 $\xi(\vec{x}) = \prod_{i=1}^{\ell} \xi_i(x_i)$ ,  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_{\ell}) \in \Omega^{\ell}$  とおく ( $\ell := \pi(\rho)$ )。ℓ変数多項式  $X_{\vec{n}, \vec{p}}(\vec{x}) := \prod_{i=1}^{\ell} X_{n_i, p_i}(x_i)$ ,  $\vec{n} = (n_1, \dots, n_{\ell})$ ,  $\vec{p} = (p_1, \dots, p_{\ell})$  と置くと、(4) より、 $\{X_{\vec{n}, \vec{p}}(\vec{x}) \mid \vec{n} \in \mathbb{N}_0^{\ell}\}$  は、 $\Omega^{\ell}$  上で、測度  $dm(\vec{x})$  に関して直交多項式系となる。フーリエ級数の理論 (例えば、[Ta]) より、

$$(14) \quad \xi(\vec{x}) = \sum_{\vec{n}} c(\vec{n}) X_{\vec{n}, \vec{p}}(\vec{x})$$

とフーリエ展開できる。

$$(15) \quad c(\vec{0}) = \int_{\Omega^{\ell}} \xi(\vec{x}) dm(\vec{x}) = \int_B dm(\vec{x}) + \varepsilon_1'$$

で、 $\varepsilon_1'$  を定める。 $\varepsilon_1 \rightarrow 0$  なら、 $\varepsilon_1' \rightarrow 0$  である。

さて、 $\xi_f := \xi(\vec{\lambda}_f)$ ,  $\vec{\lambda}_f = (\lambda_f(p_1), \dots, \lambda_f(p_{\ell}))$  と置くと、

$$(16) \quad 0 \leq \xi_f^4 \leq \xi_f^2 \leq \xi_f, \quad f \in \mathcal{F}_k,$$

$$(17) \quad 1 = \xi_f^2 = \xi_f, \quad f \in \mathcal{D}$$

が成り立つ。各  $\xi_i(x_i)$  は滑らかに取ったので、 $\vec{x} \in \Omega^{\ell}$  に関して一様に (14) の級数は収束することに注意すると、任意の  $\varepsilon_2 > 0$  に対して、十分大きい  $r$  で、

$$(18) \quad \left| \xi_f - \sum_{0 \leq n_1, \dots, n_{\ell} \leq r} c(\vec{n}) X_{\vec{n}, \vec{p}}(\vec{\lambda}_f) \right| < \varepsilon_2$$



とできる。以下、そんな  $r$  を一つ固定する。このとき、(16) (17) (18) より、

$$\begin{aligned} \sum_{f \in \mathcal{D}} \omega_f |S_1(s, f)|^2 &\leq \sum_{f \in \mathcal{F}_k} \omega_f \xi_f^2 |S_1(s, f)|^2 \\ (19) \quad &\leq 2 \sum_{f \in \mathcal{F}_k} \omega_f \left| \sum_{0 \leq n_1, \dots, n_\ell \leq r} c(\vec{n}) X_{\vec{n}, \vec{p}}(\vec{\lambda}_f) \right|^2 |S_1(s, f)|^2 \end{aligned}$$

$$(20) \quad + 2\varepsilon_2^2 \sum_{f \in \mathcal{F}_k} \omega_f |S_1(s, f)|^2.$$

この最終式を計算するために、Petersson formula から導かれる次の結果を用いる (see [Iw2])。

**Lemma 5.1.** 重さ  $k > 2$  とする。そのとき、任意の複素数  $b_n$  に対して、次が成り立つ。

$$\frac{(k-2)!}{(4\pi)^{k-1}} \sum_{f \in \mathcal{F}_k} \omega_f \left| \sum_{n \leq x} b_n \lambda_f(n) \right|^2 = (1 + O(x)) \sum_{n \leq x} |b_n|^2,$$

ここで、*the implied constant is absolute.*

この Lemma より、式 (20) 中の和は、

$$\leq \frac{(4\pi)^{k-1}}{(k-2)!} (1 + O(\nu)) \rho^{1-2\sigma_1}.$$

次に、式 (19) 中の和を計算するが、この講究録では見やすくするために、 $\ell = 1$  の場合を述べてみる。つまり、

$$\begin{aligned} &\sum_{f \in \mathcal{F}_k} \omega_f \left| \sum_{n_1=0}^r c(n_1) X_{n_1, p_1}(\lambda_f(p_1)) \right|^2 \left| \sum_{\rho < p \leq \nu} \frac{\lambda_f(p)}{p^s} \right|^2 \\ (21) \quad &= \sum_{f \in \mathcal{F}_k} \omega_f \left| \sum_{\rho < p \leq \nu} \left( \sum_{n_1=0}^r c(n_1) X_{n_1, p_1}(\lambda_f(p_1)) \right) \frac{\lambda_f(p)}{p^s} \right|^2 \end{aligned}$$

を調べる。ここで、(3) を使って、

$$\sum_{n_1=0}^r c(n_1) X_{n_1, p_1}(\lambda_f(p_1)) = \sum_{n_1=0}^r b(n_1) X_{n_1}(\lambda_f(p_1)) =: \xi_{f,r}$$

と、ある  $b(n_1)$  で書き換えておき、 $X_{n_1}(\lambda_f(p_1)) = \lambda_f(p_1^{n_1})$  (see [Se]) と Lemma 5.1 を使うと、(21) は、

$$\begin{aligned} &\sum_{f \in \mathcal{F}_k} \omega_f \left| \sum_{\rho < p \leq \nu} \sum_{n_1=0}^r b(n_1) \frac{\lambda_f(p_1^{n_1} p)}{p^s} \right|^2 \\ &\leq \frac{(4\pi)^{k-1}}{(k-2)!} (1 + O(k)) \sum_{n_1=0}^r |b(n_1)|^2 \rho^{1-2\sigma_1} \end{aligned}$$

( $k$  は、十分大)。Lemma 5.1 より、

$$\sum_{f \in \mathcal{F}_k} \omega_f |\xi_{f,r}|^2 = \frac{(4\pi)^{k-1}}{(k-2)!} (1 + O(k)) \sum_{n_1=0}^r |b(n_1)|^2$$

が分かり、また、(16) より

$$\begin{aligned} & \lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{f \in \mathcal{F}_k} \omega_f |\xi_{f,r}|^2 \\ & \leq \lim_{r \rightarrow \infty} (\omega_f^2)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{f \in \mathcal{F}_k} \xi_{f,r} \right)^{ha} \end{aligned}$$

となるので、以下、 $\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{f \in \mathcal{F}_k} \xi_{f,r}$  を計算する。 $\xi_{f,r}$  の定義より

$$\frac{1}{\#\mathcal{F}_k} \sum_{f \in \mathcal{F}_k} \xi_{f,r} = \sum_{n_1=0}^r \frac{c(n_1)}{\#\mathcal{F}_k} \sum_{f \in \mathcal{F}_k} X_{n_1, p_1}(\lambda_f(p_1))$$

で、Theorem 3.1 ( $g(\vec{x})$  に  $X_{\vec{n}, \vec{p}}(\vec{x})$  を適用) と (4) により、

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{f \in \mathcal{F}_k} \xi_{f,r} \ll \#\mathcal{F}_k \cdot c(\vec{0}), \quad (k \rightarrow \infty)$$

( $\xi(\vec{x})$  は、滑らかより、 $\sum_{n_1=0}^{\infty} c(n_1)$  は収束することに注意) が分かる。

そして、[HLG] による  $\omega_f$  の評価、 $\sum_{f \in \mathcal{D}} 1 \ll \#\mathcal{F}_k \int_B dm(\vec{x})$  (by Theorem 3.1) に注意して、以上をまとめると ( $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  は十分小さくとる)、

$$\sum_{f \in \mathcal{D}} |S_1(s, f)| \ll \#\mathcal{F}_k \cdot \int_B dm(\vec{x}) \cdot \rho^{\frac{1}{2}-\sigma_1}$$

となる。 $\sum_{f \in \mathcal{D}} |S_2(s, f)|$  は、もっと簡単に評価できて、結局、Proposition 5.1 が得られる。□

この Proposition と Theorem 3.1 と Lemma 4.2 により、次が得られる。

**Corollary 5.1.** Proposition 5.1 の設定の元で、

$$(22) \quad \mathcal{E}(\rho, d, k) = \{f \in \mathcal{D}(\rho, d, k) \mid \max_{s \in K} |\log L_\nu(s, f) - \log L_\rho(s, f)| \leq c\rho^{\frac{1}{2}-\sigma_1}\}$$

とおく。そのとき、 $k$  が十分大きいならば、

$$(23) \quad \frac{\#\mathcal{E}(\rho, d, k)}{\#\mathcal{F}_k} \geq \frac{1}{2} \int_B dm(\vec{x}).$$

次に、 $L(s, f)$  の近似関数等式、Lemma 5.1、 $\#\mathcal{F}_k \asymp k$  等を使って、次が得られる。

**Proposition 5.2.** 任意の  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < 1$ ) に対して、 $\nu > \nu_0(\varepsilon)$ ,  $k > k_0(\varepsilon, \nu)$  ならば、

$$(24) \quad \sum_{f \in \mathcal{F}_k} \int_U |L(s, f) - L_\nu(s, f)| d\sigma dt \ll \#\mathcal{F}_k \cdot \varepsilon^2.$$

**Corollary 5.2.** 任意の  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < 1$ ) を与える。

$$(25) \quad \mathcal{A} = \{f \in \mathcal{F}_k \mid \max_{s \in K} |L(s, f) - L_\nu(s, f)| \leq c\varepsilon\}$$

と置くと、 $\nu > \nu_0(\varepsilon)$ ,  $k > k_0(\varepsilon, \nu)$  に対して、 $\#\mathcal{A} \geq (1 - \varepsilon)\#\mathcal{F}_k$ .

## 6. 主結果の証明

この Section では、主結果 Theorem 2.1 (1) の証明を仕上げる。

今、任意の小さな  $\varepsilon_1 > 0$  を与えると、Proposition 4.1 より、 $\rho$  が十分大きければ、ある  $\hat{\theta}$  があって、

$$(26) \quad \max_{s \in K} |L_\rho(s, \hat{\theta}) - h(s)| < \varepsilon_1$$

と出来る。ここで、関数  $L_\rho(s, \hat{\theta})$  の  $\hat{\theta}$  に関する連続性より、ある  $\delta = \delta(\varepsilon_1, \rho) (< 1/100)$  があって、

$$(27) \quad \max_{s \in K} |L_\rho(s, f) - L_\rho(s, \hat{\theta})| < \varepsilon_1 \quad \text{if } |\theta(p) - \lambda_f(p)| < \delta$$

である。

今、Corollary 5.1 において、 $d = \delta$  に取ると、 $f \in \mathcal{E}$  に対しては、

$$\begin{aligned} \frac{L_\nu(s, f)}{L_\rho(s, f)} &= 1 + O(\log L_\nu(s, f) - \log L_\rho(s, f)) \\ \max_{s \in K} |L_\rho(s, f)| &\leq 2\varepsilon_1 + \max_{s \in K} |h(s)| \quad (\text{by (26) (27)}) \end{aligned}$$

より、十分大きな  $k$  に対して、

$$\max_{s \in K} |L_\nu(s, f) - L_\rho(s, f)| \ll c_h \rho^{\frac{1}{2}-\sigma} \quad (c_h := 1 + \max_{s \in K} |h(s)|)$$

なる  $f \in \mathcal{E}$  は、 $\#\mathcal{E} \geq \frac{1}{2}\#\mathcal{F}_k \int_B dm(\vec{x})$  であることが分かる。また、Corollary 5.2 において、 $\varepsilon = \frac{1}{3} \int_B dm(\vec{x})$  と取ると、 $\#\mathcal{A}/\#\mathcal{F}_k \geq 1 - \frac{1}{3} \int_B dm(\vec{x})$  なる  $f \in \mathcal{A}$  に対して、

$$\max_{s \in K} |L(s, f) - L_\nu(s, f)| \ll \frac{1}{3} \int_B dm(\vec{x})$$

である。ゆえに、

$$(28) \quad \max_{s \in K} |L(s, f) - L_\rho(s, f)| \ll c_h \rho^{\frac{1}{2}-\sigma} + \frac{1}{3} \int_B dm(\vec{x})$$

なる  $f \in \mathcal{F}_k$  は、 $k$  が十分大きいと、 $\frac{1}{10}\#\mathcal{F}_k \int_B dm(\vec{x})$  個以上ある。以上より、

$$c_h \rho^{\frac{1}{2}-\sigma} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{\pi(\rho)} < \varepsilon_1$$

となるぐらい十分大きな  $\rho$  と適当な  $\nu$  に対して、(26) (28) より、主結果を得る。□

## REFERENCES

- [AL] A. Atkin, J. Lehner: Hecke operators on  $\Gamma_0(m)$ , *Math. Ann.* **185** (1970), 134–160.
- [Ba] B. Bagchi: A joint universality theorem for Dirichlet  $L$ -functions, *Math. Z.* **181** (1982), 319–334.
- [CDF] J. B. Conrey, W. Duke, D. W. Farmer: The distribution of the eigenvalues of Hecke operators, *Acta Arith.* **78** (1997), 405–409.
- [DI] J. Deshouillers, H. Iwaniec: Kloosterman sums and Fourier coefficients of cusp forms. *Invent. Math.* **70** (1982), 219–288.
- [Em] K. M. Eminyan:  $\chi$ -universality of the Dirichlet  $L$ -function, *Mat. Zametki* **47** (1990), 132–137 (Russian) = *Math. Notes* **47** (1990), 618–622
- [Go] S. M. Gonek: Analytic properties of zeta and  $L$ -functions, PhD. Thesis, University of Michigan, 1979.
- [Iw1] H. Iwaniec: The spectral growth of automorphic  $L$ -functions. *J. reine angew. Math.* **428** (1992), 139–159.
- [Iw2] H. Iwaniec: Topics in Classical Automorphic Forms, Graduate Studies in Math. 17, American Mathematical Society, 1997.
- [HLG] J. Hoffstein, P. Lockhart: Coefficients of Maass forms and the Siegel zero. With an appendix by Dorian Goldfield, Hoffstein and Daniel Lieman. *Ann. of Math. (2)* **140** (1994), no. 1, 161–181.
- [KV] A. A. Karatsuba, S. M. Voronin: The Riemann Zeta-Function, Walter de Gruyter, 1992.
- [La] A. Laurinćikas: Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function, Kluwer, 1996.
- [LM1] A. Laurinćikas, K. Matsumoto: The joint universality and the functional independence for Lerch zeta-functions, *Nagoya Math. J.* **157** (2000), 211–227.
- [LM2] A. Laurinćikas, K. Matsumoto: The universality of zeta-functions attached to certain cusp forms, to appear in *Acta Arith.*
- [Lu] W. Luo: On the spectral mean value of linear forms in twisted Fourier coefficient of Maass cusp forms, *Acta Arith.* **70** (1995), 377–391.
- [Ma] K. Matsumoto: The mean values and the universality of Rankin-Selberg  $L$ -functions, preprint.
- [Mi1] H. Mishou: The universality theorem for  $L$ -functions associated with ideal class characters, preprint.
- [Mi2] H. Mishou: The universality theorem for Hecke  $L$ -functions, preprint.
- [Mo] 本橋 洋一: リーマンゼータ函数と保型波動, 共立出版
- [Re] A. Reich: Werteverteilung von Zetafunktionen, *Arch. Math.* **34** (1980), 440–451.
- [Sa] P. Sarnak: Statistical properties of eigenvalues of the Hecke operators, In: *Analytic Number Theory and Diophantine Problems*, *Progr. Math.* **70** (1987), 321–331, Birkhauser.
- [Se] J. P. Serre: Répartition asymptotique des valeurs propres de l'opérateur de Hecke  $T_p$ , *J. Amer. Math. Soc.* **10** (1997), 75–102.
- [Ta] 高橋 陽一郎: 実関数と Fourier 解析 1, 岩波書店
- [Vo] S. M. Voronin: Theorem on the "universality" of the Riemann zeta-function, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **39** (1975), 475–486 (in Russian) = *Math. USSR Izv.* **9** (1975), 443–453.